数学：解答・解説

Ucaroute.

あなたのルートが、ここにあル。

1 (1) ① $-4+12\div 2=-4+6=\mathbf{2}$

② $a^2b\div 3ab\times(-9a)=\dfrac{-9a^3b}{3ab}=\boldsymbol{-3a^2}$

③ $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-2\sqrt{3})=7-2\sqrt{21}+\sqrt{21}-6=\mathbf{1-\sqrt{21}}$

(2) ① ある数 x を 2 乗した数は x^2, x を 2 倍した数は $2x$ と表されるので $x^2+2x=5$ すなわち $\boldsymbol{x^2+2x-5=0}$

② $x^2+2x-5=0$ を解くと

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-5)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{2}=\boldsymbol{-1\pm\sqrt{6}}$$

(3) ① 国勢調査, 学校で行う生徒の歯科検診, A 中学校の 3 年生の進路希望調査は全数調査（全員を調査する）ので, 標本調査は **イ：川の水質検査**.

② 抽出した 10 個の球のうち, 白い球は 7 個, オレンジの球は 3 個なので, 袋の中に入っていた白い球の個数を x とすると

$$x:30=7:3$$

よって $x=\mathbf{70}$ 個

(4) ① **エ**の展開図は下に突き出た面が重なるため正しくない.

② アのような展開図を考えると辺 AH は辺 H-G-F-E と辺 AE からなる直角三角形の斜辺となるので, その長さは $\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{90}=\mathbf{3\sqrt{10}}$

(5) ① 目の出方は全部で 36 通りあり, そのうち $y = x$ 上の点となるのは, a と b の値が同じになるとき, すなわち

$$(a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

の 6 通りなので, 求める確率は $\dfrac{6}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

② 線分 OP の長さが 4 cm 以下になるのは

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$$

の 8 通りなので, 求める確率は $\dfrac{8}{36} = \mathbf{\dfrac{2}{9}}$

(6) ① 弧 BC に対する円周角なので, $x = \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BDC} = \mathbf{63}$

② $\angle\mathrm{BDC} = 63$ の外角なので $\angle\mathrm{EDB} = 180 - 63 = 117$
$\triangle\mathrm{BDE}$ の内角の和は 180 度なので, $\angle\mathrm{EBD} = 180 - 38 - 117 = 25$
よって, $\triangle\mathrm{AFB}$ の内角の和は 180 度なので, $\angle\mathrm{AFB} = 180 - 63 - 25 = 92$
したがって, 外角であるから $y = 180 - 92 = \mathbf{88}$

(7) ① 底面の円の半径を r とすると, 周の長さは $2\pi r$
側面の円の半径を R とすると, 弧の長さは 90 度が円の 4 分の 1 であることから $\dfrac{1}{4} \times 2\pi R = \dfrac{\pi R}{2}$
これらは等しいので $2\pi r = \dfrac{\pi R}{2}$, すなわち $R = 4r$ なので, **4** 倍.
②
1. 中心から A まで直線を引く.
2. 中心から A までの線分は側面の円の半径 (R) であるから, 垂直二等分線を引いて半分の長さにする.
3. もう一度垂直二等分線を引いて, その半分の長さにする.
4. このようにすると, この長さは側面の円の半径の 4 分の 1, すなわち 底面の円の半径となるので, A を中心としてその長さの円を作図し, 中心から A までの直線と交わる点が O である.

2 （1）① P は関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点なので, y 座標は $\dfrac{1}{2}\times 3^2=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

② Q の x 座標は -3 なので, $\mathrm{PQ}=6$
四角形 PRQS は平行四辺形なので $\mathrm{RS}=6$, すなわち R の x 座標は 6
Q $\left(-3,\dfrac{9}{2}\right)$, R (6,18) なので傾きは

$$\frac{18-\frac{9}{2}}{6+3}=\frac{\frac{27}{2}}{9}=\frac{27}{18}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

y 座標は $y-18=\dfrac{3}{2}(x-6)$, すなわち $y=\dfrac{3}{2}x+9$ より, 切片は $\mathbf{9}$

（2）$\mathrm{PQ}=2p$ より $\mathrm{SH}=4p$
よって, S の y 座標は $\mathrm{OH}+4p=\dfrac{p^2}{2}+4p$
また, R の y 座標は $\dfrac{1}{2}\times(2p)^2=2p^2$ なので, これらが等しくなるのは

$2p^2=\dfrac{p^2}{2}+4p$ $\qquad$ $\dfrac{3}{2}p^2-4p=0$ $\qquad$ $p\left(\dfrac{3}{2}p-4\right)=0$
$p>0$ より $\dfrac{3}{2}p-4=0$
これを解いて $p=\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$

3 (1) $\angle\mathrm{BEC} = 90^\circ$, $\angle\mathrm{EBC} = 45^\circ$ より, $\angle\mathrm{ECB} = 45^\circ$
$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{ECB}$ で 2 角が等しいので, $\triangle\mathrm{BEC}$ は 二等辺三角形
二等辺三角形であるから $\mathrm{EB} = \mathrm{EC}$

(2) 公式解答の通り

(3) $\triangle\mathrm{EBF} \equiv \triangle\mathrm{ECA}$ より $\mathrm{BF} = 15$
$\mathrm{FD} = a$ とおく。$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{FCD}$ であるから、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{FD} = \mathrm{BD} : \mathrm{CD}$$
$$9 : a = (a + 15) : 6$$
$$a^2 + 15a - 54 = 0$$
$$(a + 18)(a - 3) = 0$$

$a > 0$ より, $a = 3$ を得る。この結果から、$\mathrm{AF} = 3\sqrt{10}, \mathrm{AE} = 3\sqrt{5}, \mathrm{EC} = 6\sqrt{5}$ を得て、(2) の結果を用いることで $\triangle\mathrm{EBF} = \mathbf{45}$ と求まる。

(別解)
$\mathrm{DC} = 6$ より $\triangle\mathrm{BFC} = 15 \times 6 \div 2 = 45$
A から辺 BC に下した垂線の足を H とする。このとき、A, F, H は同一直線上にある。(※)
また, $\mathrm{BH} = x$, $\mathrm{FH} = y$ とおく。
$\triangle\mathrm{FBH}$ に対する三平方の定理より, $x^2 + y^2 = 15^2$
$\triangle\mathrm{AFB}$ の面積は $\mathrm{AF} \times \mathrm{BH} \div 2 = (x - y) \times x \div 2$ でありまた, $\mathrm{BF} \times \mathrm{AD} \div 2 = 15 \times 9 \div 2$ でもあるから

$$x(x - y) = 9 \cdot 15$$

を得る。
ここで、$15^2 \cdot 9 = 15 \cdot x(x - y)$ でありまた, $15^2 \cdot 9 = 9(x^2 + y^2)$ より,

$$15 \cdot x(x - y) = 9(x^2 + y^2)$$

これを整理すると,

$$6x^2 - 15xy - 9y^2 = 0$$
$$2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$$
$$(2x + y)(x - 3y) = 0$$

x, y 共に正なので $x = 3y$ を得る。これを用いると、

$$x = \frac{9\sqrt{10}}{2},\ y = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

と求まる。

この結果から、$\mathrm{AF} = 3\sqrt{10}$, $\mathrm{AE} = 3\sqrt{5}$, $\mathrm{EC} = 6\sqrt{5}$ を得て、(2) の結果を用いることで $\triangle\mathrm{EBF} = \mathbf{45}$ と求まる。
（※の証明）
点 A から点 F を通るように直線を描き、線分 BC との交点を点 H とする。AE = EF より、三角形 AEF は直角二等辺三角形となる。よって、$\angle\mathrm{EAH} = 45^\circ$ となる。$\angle\mathrm{ABH} = 45^\circ$ でもあるため、三角形 ABH は直角二等辺三角形になる。ゆえに、線分 AH は辺 BC に直角で交わる角 A の垂線である。

4 (1) ① △OAB と △OPQ は 1:2 の相似なので, **2** 倍

② OM:ON $= 1{:}4$ すなわち OM:MN $= 1:4-1=\mathbf{1:3}$

③ 原点と E(4,1) を通る直線は $y=\dfrac{1}{4}x$ と表されるので, $x=10$ のとき,

$$\frac{1}{4}\times 10=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

(2) (a)

O'$(0,n)$, H$(6,1)$, F$(4,-1)$ より

O'H は $y=\dfrac{1-n}{6}x+n$ と表され, $x=10$ のとき,

$$\frac{1-n}{6}\times 10+n=\boldsymbol{-\frac{2}{3}n+\frac{5}{3}}$$

(b)

O'F は $y=\dfrac{-1-n}{4}x+n$ と表され, $x=10$ のとき,

$$\frac{-1-n}{4}\times 10+n=\boldsymbol{-\frac{3}{2}n-\frac{5}{2}}$$

(3) PQ $=100$ となるので

$$\mathrm{PQ}=p-q=-\frac{2}{3}n+\frac{5}{3}-\left(-\frac{3}{2}n-\frac{5}{2}\right)=\frac{-4n+9n}{6}+\frac{10+15}{6}=\frac{5n+25}{6}=100$$

これより, $5n+25=600$ $\qquad 5n=575$ $\qquad n=\mathbf{115}$